**Апрель санына**

*Эшкәртте: Сабирзянов Т.*

*25 февраль 2020 ел*

Готовимся к ЕГЭ

Расстояние между скрещивающимися прямыми

**Кадрия ШАКИРОВА,**

доцент кафедры теории и технологий преподавания математики и информатики Института математики и механики им. Н.И.Лобачевского КФУ, кандидат педагогических наук

**Наиля ТИМЕРБАЕВА,**

доцент кафедры теории и технологий преподавания математики и информатики Института математики и механики им. Н.И.Лобачевского КФУ, кандидат педагогических наук

**Эльмира ФАЗЛЕЕВА,**

доцент кафедры теории и технологий преподавания математики и информатики Института математики и механики им. Н.И.Лобачевского КФУ, кандидат педагогических наук

Задачи по стереометрии высокого уровня сложности в ЕГЭ по математике профильного уровня предполагают построение и вычисление площадей сечений, а также расстояний и углов в пространстве.

Итоги экзаменов предыдущих лет показывают, что задачи по стереомет-  
рии по-прежнему являются самыми сложными и к их решению приступают не более трети выпускников, еще меньше выполняют их на максимальные два первичных балла.

Задания по стереометрии состоят из теоретической и вычислительной части. Причем 1 балл можно получить, если выполнен только один из пунктов: а) или б).

Чтобы успешно решать такие задачи, необходимо начать специальную подготовку уже в X классе. Прежде всего следует обратить внимание на знание теорем, формул, свойств геометрических фигур и тел. А также на так называемые «дежурные факты», помогающие быстро вычислить некоторые величины (например, длины диагоналей квадрата или куба) или применить свойство, однажды доказанное (например, перпендикулярность скрещивающихся ребер правильного тетраэдра).

Особую сложность представляют задачи на нахождение расстояния между скрещивающимися прямыми. Учащимся необходимо не только знать методы решения данного типа задач, но и уметь применять их в зависимости от конкретного случая. В данной статье предлагаем различные методы нахождения расстояния между скрещивающимися прямы-  
ми – поэтапно-вычислительный, векторный, опорных задач и др., а также методика их применения.

Известно, что расстояние между двумя скрещивающимися прямыми равно длине отрезка их общего перпендикуляра. Но при решении задачи не всегда удается построить общий перпендикуляр. Поэтому нужно знать и уметь применять и другие методы.

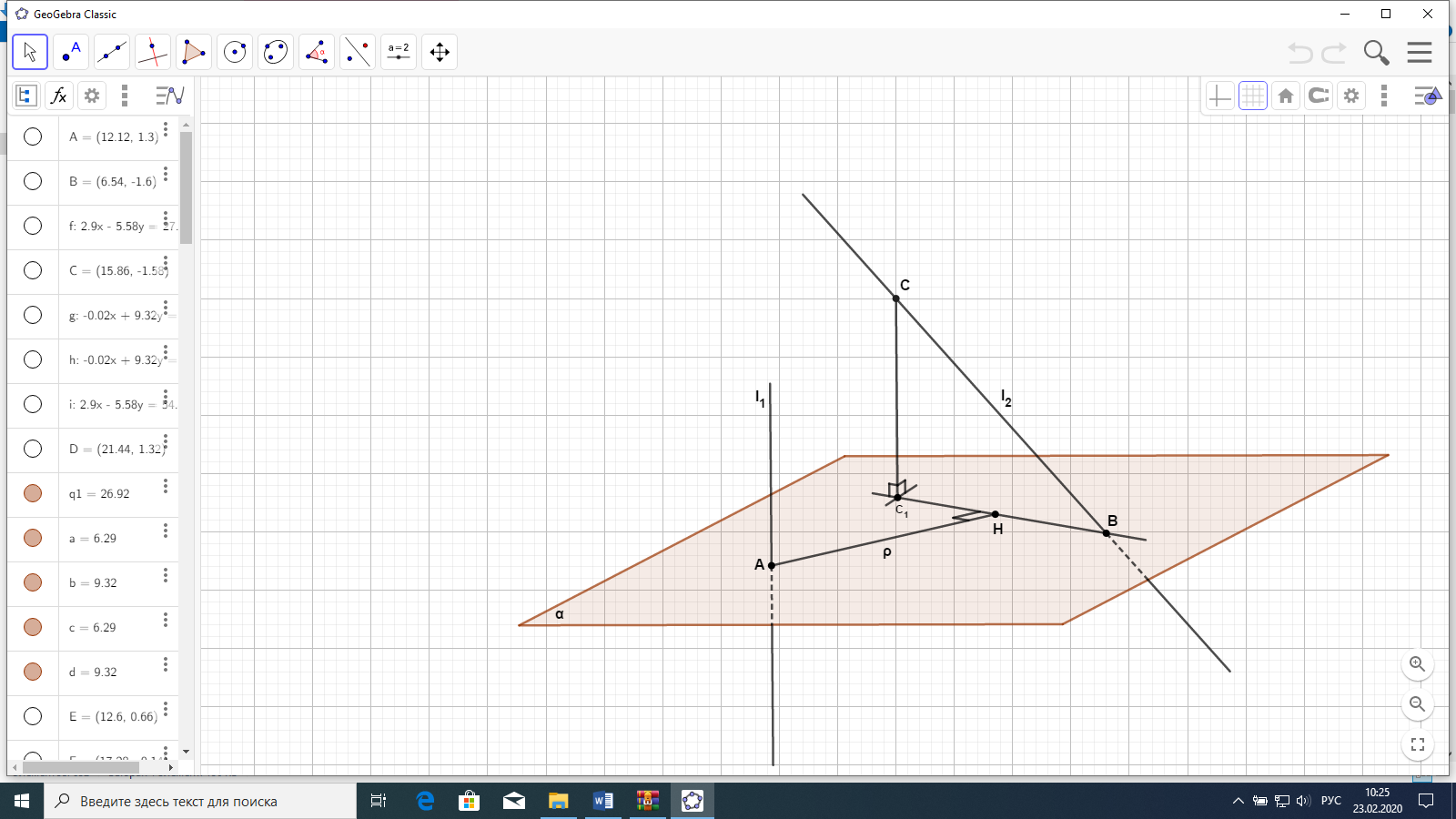
Для нахождения расстояния между скрещивающимися прямыми можно использовать один из приведенных способов [1].

1. Метод построения общего перпендикуляра или поэтапно-вычислительный метод. В этом случае строится общий перпендикуляр двух скрещивающихся прямых (отрезок с концами на этих прямых и перпендикулярный каждой из них) и находится его длина.

2. Метод параллельных прямой и плоскости. В этом случае плоскость содержит одну из прямых и параллельна второй. Тогда искомое расстояние будет равно расстоянию от какой-нибудь точки второй прямой до построенной плоскости.

3. Метод параллельных плоскостей. В этом случае данные скрещивающиеся прямые заключаются в параллельные плоскости, проходящие через них, и находится расстояние между этими плоскостями.

4. Метод ортогонального проектирования. В этом случае строится плоскость, перпендикулярная одной из данных прямых, и строится на этой плоскости ортогональная проекция другой прямой (см. рис. 1), *ρ(l1; l2)= ρ(A;* *BC1) = AH,* где *A=l1∩α, α*⊥*l1. BC1*– ортогональная проекция *l2* на плоскость *α*, *Н* – основание перпендикуляра, опущенного из *А* на *BC1*.



**Рис. 1**

Применение всех указанных методов продемонстрировано на следующем примере.

Пример 1. В кубе, длина ребра которого равна *а*, найдите расстояние между ребром и диагональю, не пересекающей его грани.

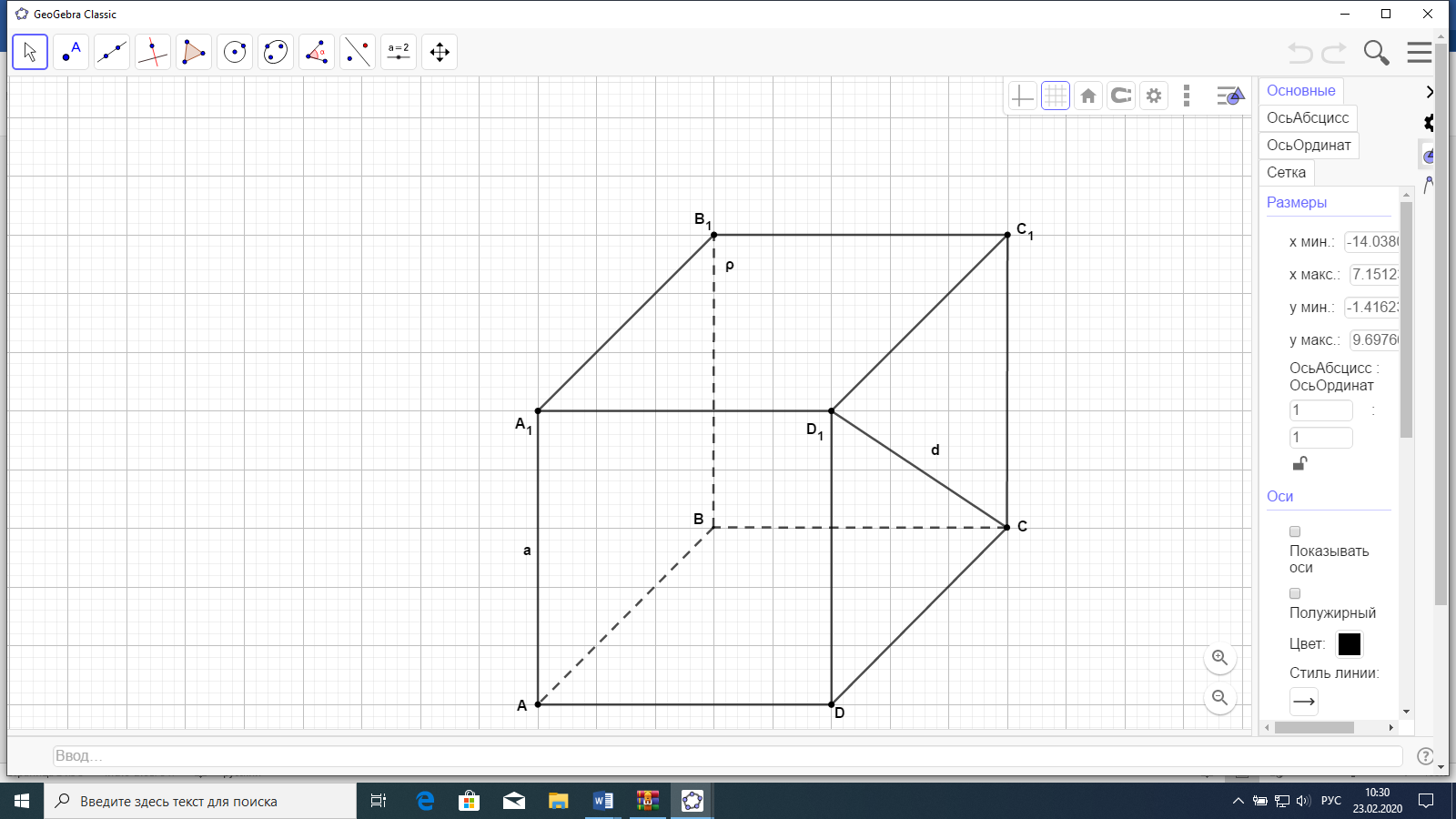
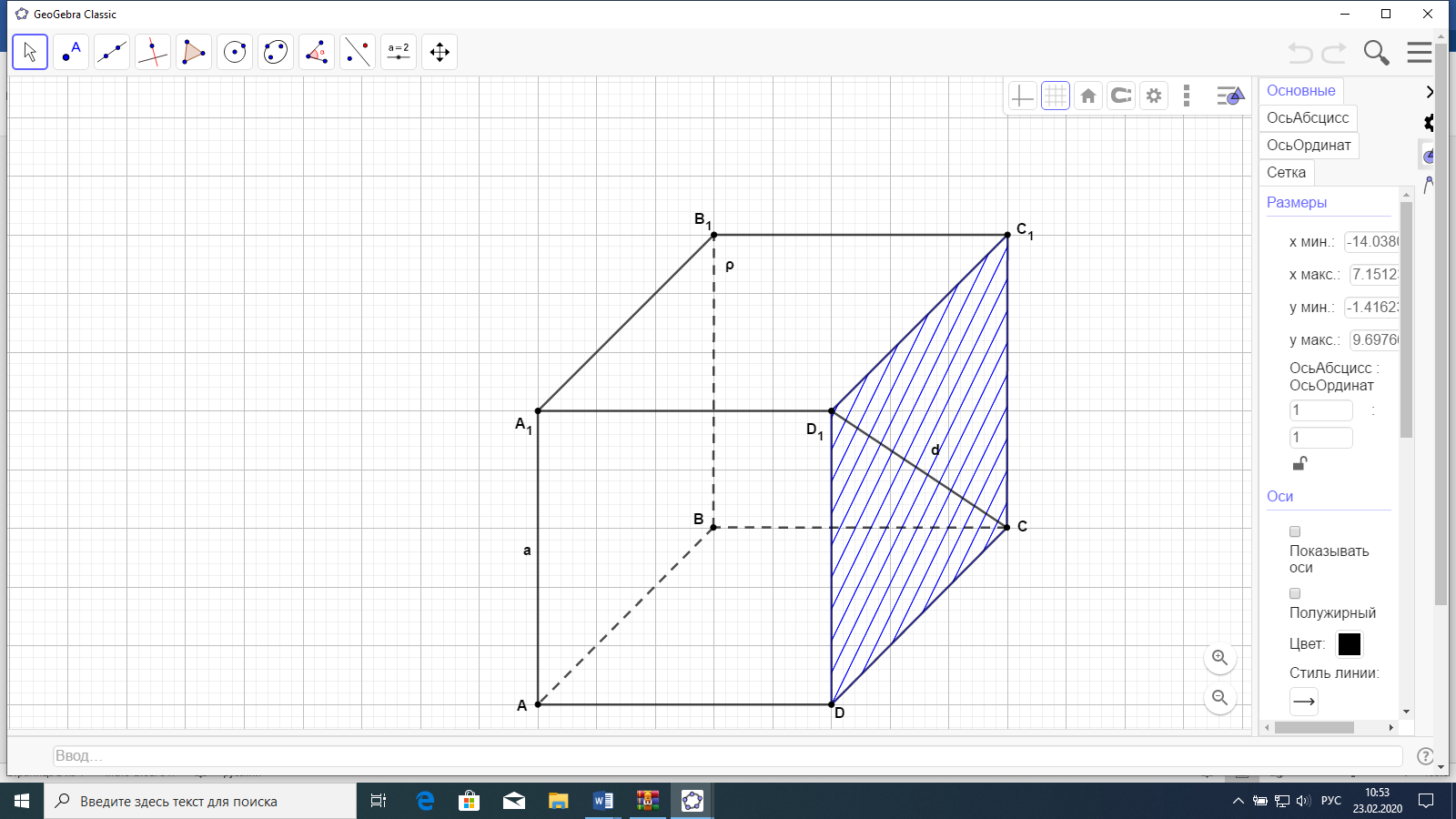
Решение. В качестве примера найдем расстояние между ребром *AA1* и диагональю *D1C*. Прямые *AA1* и *D1C* – скрещивающиеся. Используя каждый из отмеченных способов, покажем, что расстояние *ρ* между ними равно *а*.

1-й способ (см. рис. 2*а*). Так как *A1D1*⊥*AA*1 и *A1D1*⊥*D1C*, то *A1D1* –   
общий перпендикуляр двух скрещивающихся прямых *AA*1 и *D1C*. Расстояние *ρ* между *AA*1 и *D1C* равно *A1D1=a*.

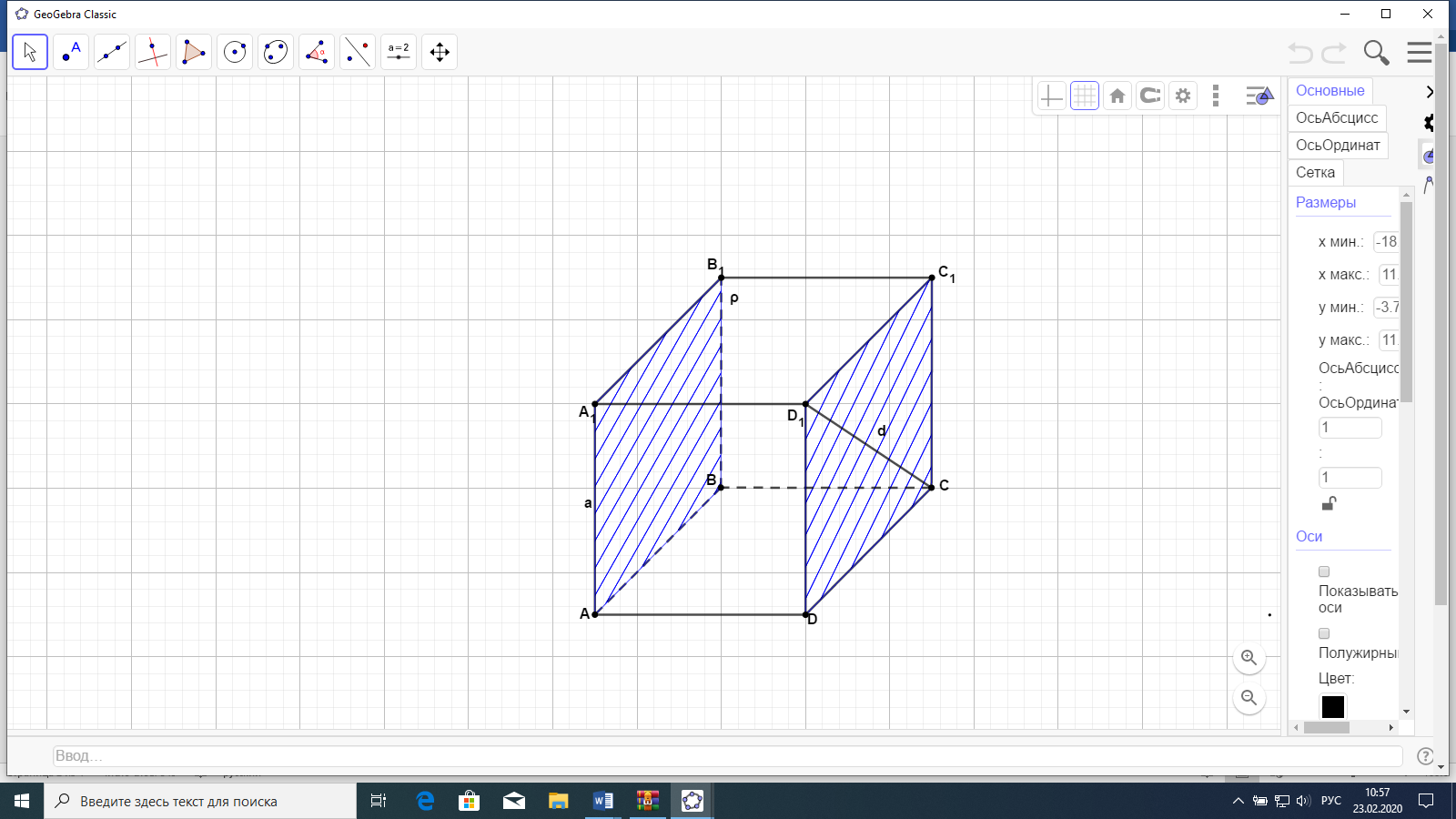
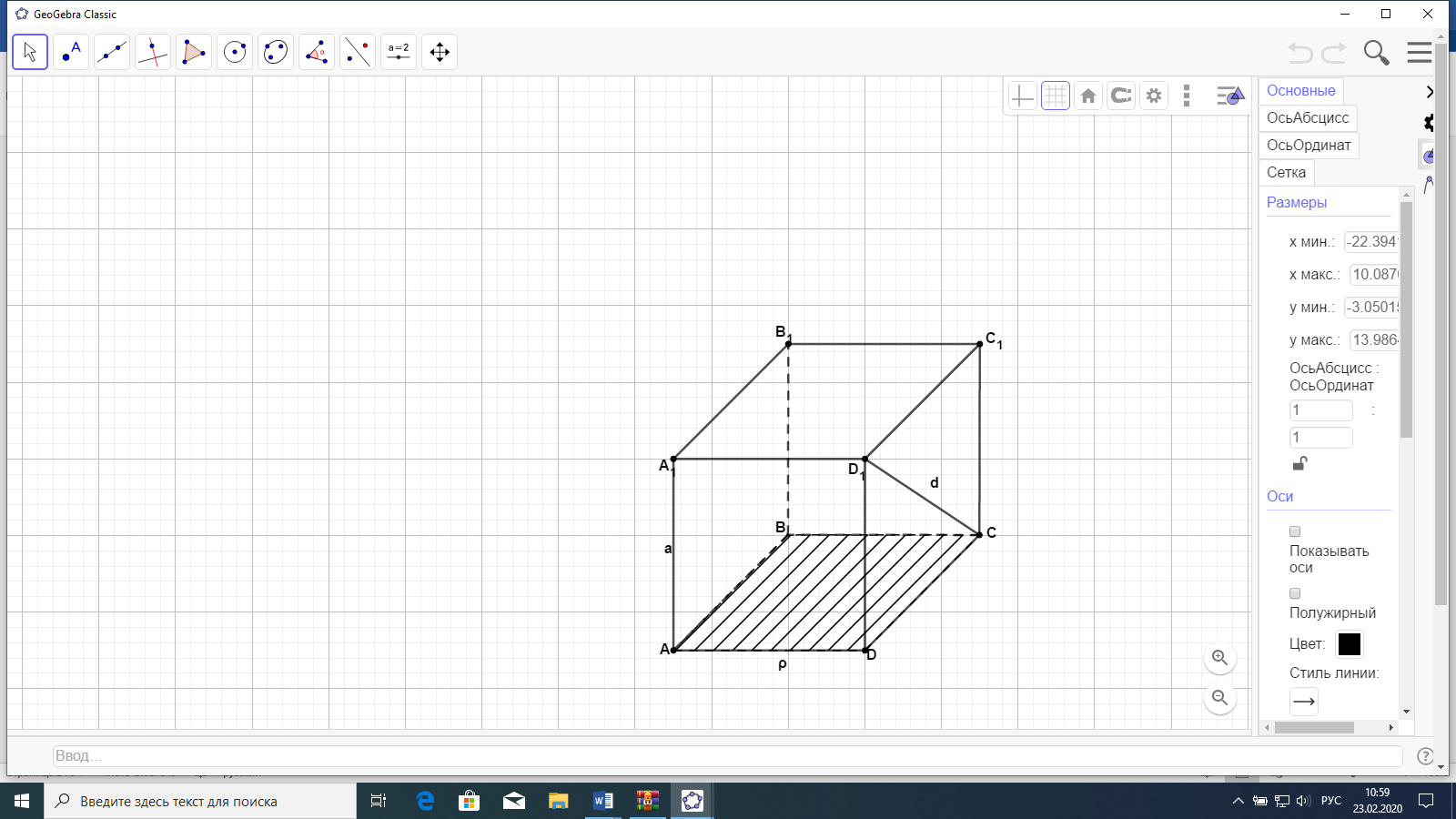
2-й способ (см. рис. 2*б*). Так как плоскость *DD1C1*, содержащая *D1C,* параллельна *AA*1, то расстояние *ρ* от *AA*1 до *DD1C1* равно *а*.

3-й способ (см. рис. 2*в*). Плоскость *DD1C1*, содержащая *D1C*, параллельна плоскости *AA1B1*, содержащей *AA1*, и расстояние *ρ* между ними равно *а.*

4-й способ (см. рис. 2*г*). Плоскость *АВС* перпендикулярна прямой *AA1*. Точка *А* – проекция *AA1* на эту плоскость. Проекцией *D1C* на плоскость *АВС* является *DC.* Расстояние *ρ* от точки *А* до *DC* равно *а*.

*а* *б*

*в г*

**Рис. 2**

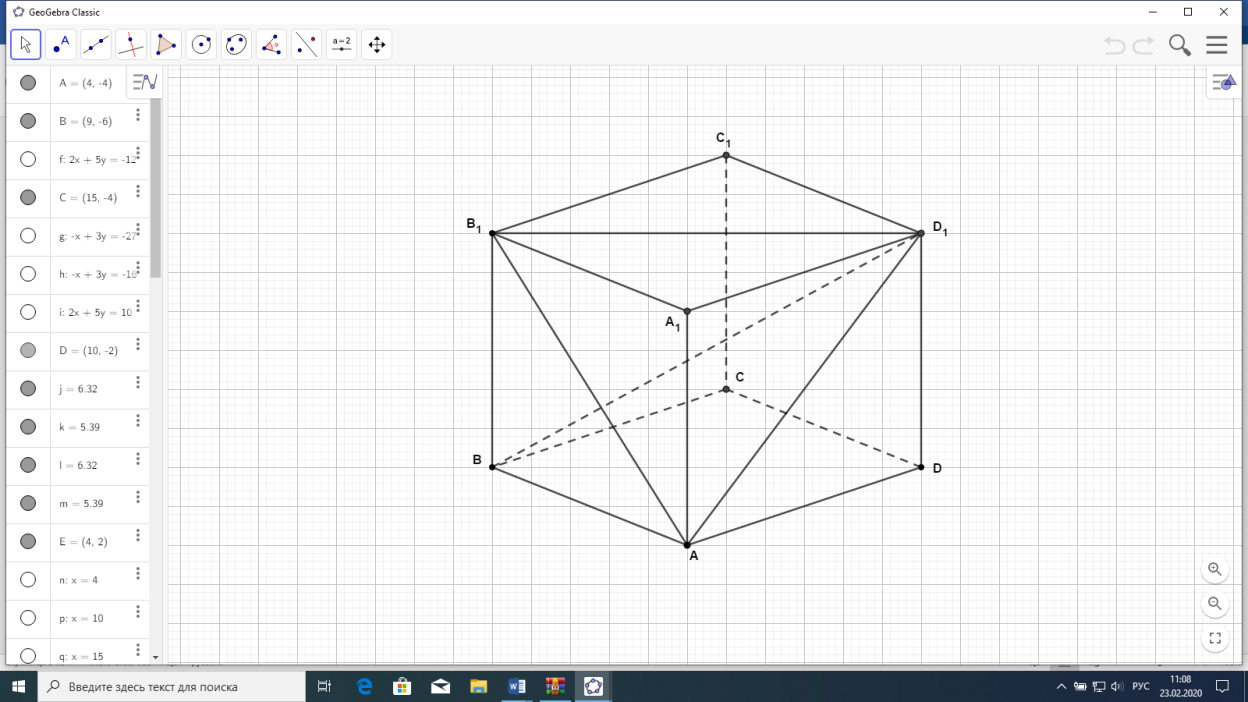
**Метод опорных задач**

При решении задач этого типа можно воспользоваться опорной задачей. *Если*  *и*  *–* скрещивающиеся ребра треугольной пирамиды*–* расстояние между ними,*,*  *–* угол между  и , объем пирамиды то 

**Пример 2.** В единичном кубе  найдите расстояние между диагональю куба  и диагональю грани 

**Решение.**Найдем искомое расстояние по формуле  где объем пирамиды (**см.** рис. 3), ,  – угол между прямыми  и  Так как площадь основания  пирамидыравна , а высота то  Значит, 

**Ответ:**



**Рис. 3**

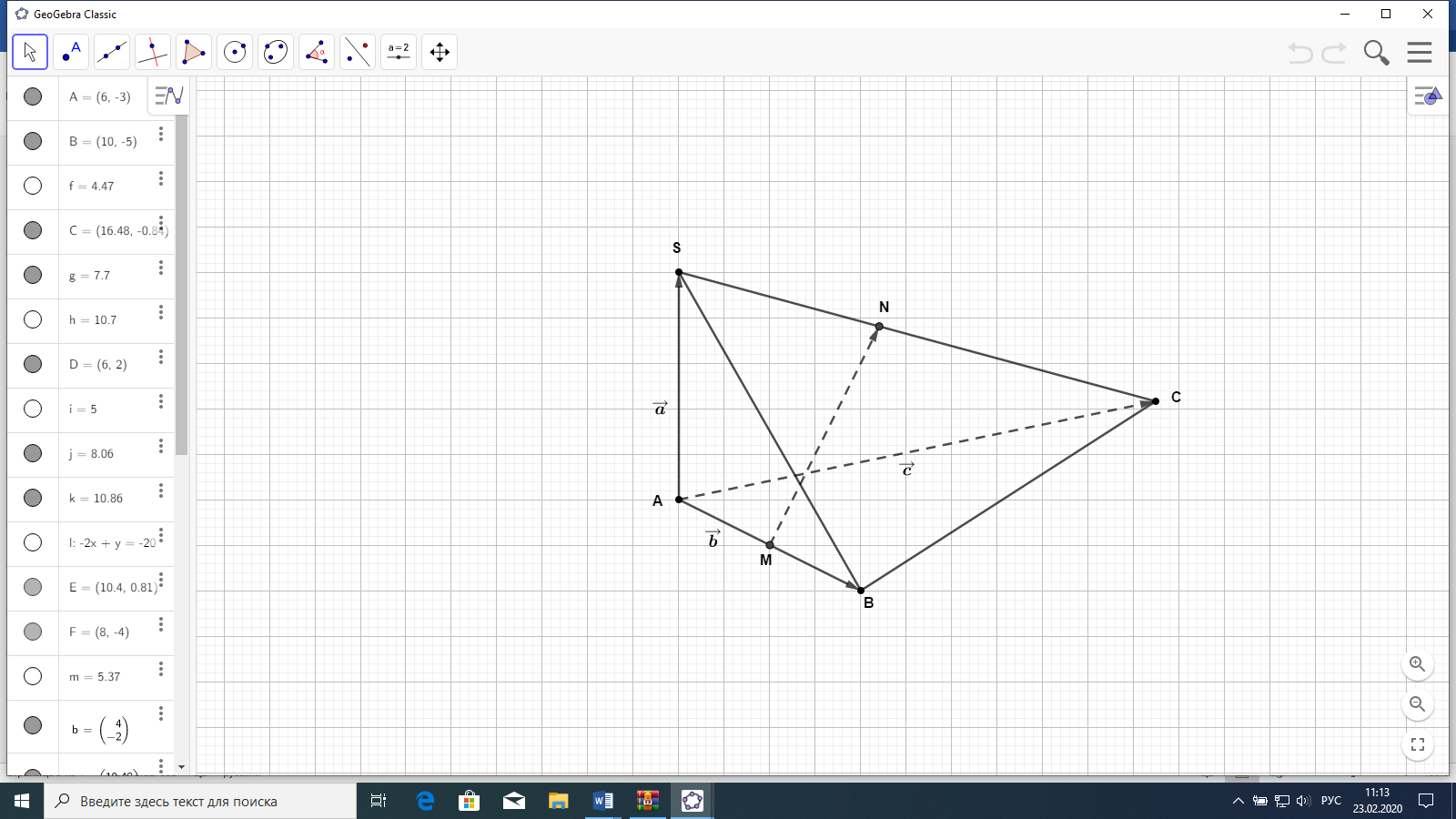
**Координатный и векторный метод решения задач**

**Пример 3.**Основание пирамиды  – равносторонний треугольник со стороной, равной 1. Вершина  проецируется в точку ,  Найти расстояние между  и .

**Решение**

; .

Пусть  (см. рис. 4).



**Рис. 4**

Тогда , но . Следовательно, .

Из условия ; а из условия

.

Получаем систему уравнений:



 откуда , .

Следовательно, .

Таким образом, .

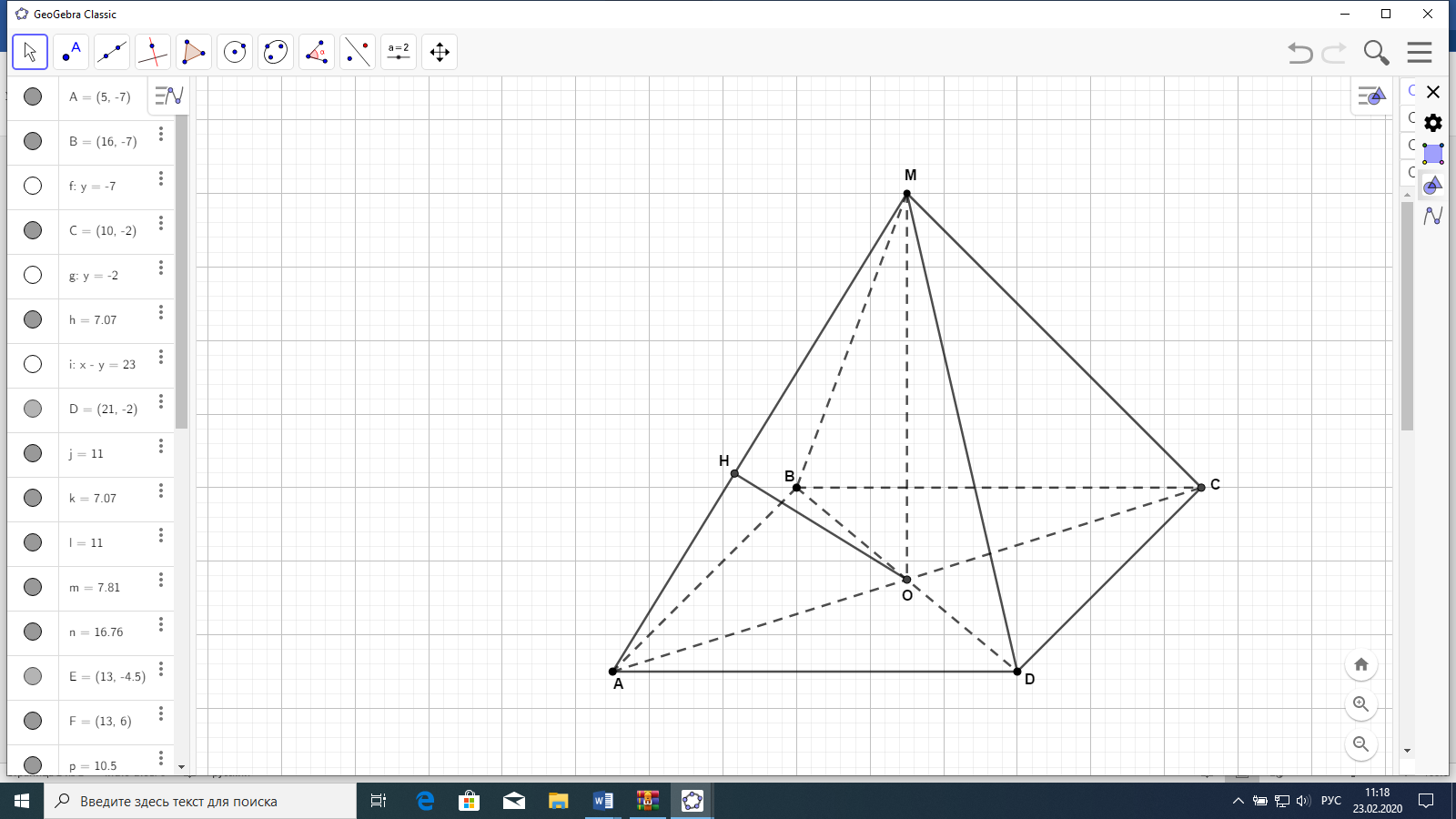
**Ответ:** .

**Пример 4.**В правильной четырехугольной пирамиде , все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми  и .

**Решение:**

Воспользуемся методом параллельных прямой и плоскости..

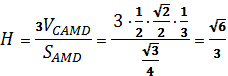
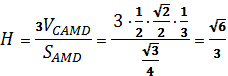
, где  – высота пирамиды  и искомое расстояние от точки  до плоскости  (**см.** рис. 5).



**Рис. 5**

Найдем .

, .

, следовательно, .

**Ответ:**

Таким образом, знание приведенных методов и умение их применять поможет выпускникам успешно справиться с заданиями данного типа.

**Литература**

1. Прокофьев А.А., Корянов А.Г. Математика. Подготовка к ЕГЭ: задания С-2. Многогранники: типы задач и методы их решения – Ростов-на Дону, Легион, 2013. – С. 208.

2. Потоскуев Е.В. Решение разноуровневых задач по геометрии. Подготовка к ЕГЭ. – М.: Илекса, 2014. – С. 271.