ЕГЭ: информатика

Элементы математической логики

**Аида ГАЙНУТДИНОВА,**

*зам. директора по науке института вычислительной математики и информационных технологий КФУ, доцент*

**Равиль ХАДИЕВ,**

*старший преподаватель кафедры теоретической кибернетики института вычислительной математики и информационных технологий КФУ*

Для решения некоторых заданий ЕГЭ как в части 1, так и в части 2 требуются знания по математической логике.

Абитуриент должен уметь:

– осуществлять преобразования логических выражений;

– формировать для логической функции таблицу истинности и логическую схему;

– использовать знания по математической логике для оптимальных алгоритмов и при программировании.

Основные определения и законы математической логики

1. Определение двух аргументных, часто используемых логических операций.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| А | B | A→B | A V B | A&B | A⊕B | A≡B | A│B |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |

2. Логические операции, используемые в языках программирования.

Знак название Паскаль С++ PYTHON

┐ – не not !!

& – и and && and

V – или or||or

– исключающее или xor

Одноаргументные выражения и их таблицы истинности

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| А | ┐┐A | A⊕A | A→A | A⊕ ┐A | A→┐A | A→1 | A→0 |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| А | A&A | A&⎤A | AVA | AV⎤A | A&0 | AV0 | A&1 | AV1 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |

Отсюда следует, что

A=AVA=A&A=A&1=AV0=┐┐А=A 0

┐A= A→┐A= A→0= A 1

1=AV1=AV˥A= A→1

0=A&˥A=A&0

Двухаргументные выражения и их таблицы истинности

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| А | B | ⎤AVB =A→B | A&⎤B | ⎤A&⎤B=⎤(AVB) | ⎤AV⎤B =⎤(A&B) =A|B |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| А | B | A&BV⎤A&⎤B = A≡B | ⎤A&BVA&⎤B = A≠B = A⊕B |
| 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 0 |

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| А | B | A&BV⎤B = AV⎤B | A&B V A = A |
| 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

Трёхаргументные выражения и их таблицы истинности

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| А | B | С | A&BVA&C = A&(BVC) | | (AVB)&(AVC) = AVB&C | |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

**Основные законы алгебры логики**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Законы** | **Для ИЛИ** | **Для И** |
| Переместительный | x\/y=y\/x | x▪y=y▪x |
| Сочетательный | x\/(y\/z)=(x\/y)\/z | x▪(y▪z)=(x▪y)▪z |
| Распределительный | x▪(y\/z)=x▪y\/x▪z | x\/(y▪z)=(x\/y)▪(x\/z) |
|  | (A → B)&(A → C) = A → B&C | |
|  | (A → B) V (A → C) = A → (B V C) | |
| Правила де Моргана | ¬ (x\/y)=¬x ▪¬y | ¬ (x▪y)= ¬x\/¬y |
| Идемпотенции | x\/x=x | x▪x=x |
| Поглощения | x\/(x▪y)=x | x▪(x\/y)=x |
| Склеивания | (x▪y)\/( ¬x▪y)=y | (x\/y)▪( ¬x\/y)=y |
| Операции переменной с инверсией | x\/¬x=1 | x▪¬x=0 |
| Операция с константами | x\/0=x, x\/1=1 | x▪0=0, x▪1=x |
| Двойного отрицания | ¬¬x=x | |

* В ⊕ B ⊕ B = B
* A ⊕ B ⊕ B = A
* A → B → B = ⎤A V B
* ⎤A → (⎤B & C V (A → B)) = 1
* ⎤(A → ⎤B) & C V (A → B) = B
* A:=А⊕B; B:=А⊕B; A:=А⊕B ⬄ swap(A,B)

ДНФ

Построение совершенной дизъюнктивно нормальной формы по таблице истинности (СДНФ).

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| А | B | С | F(A,B,C) = | ¬A&B&¬C V A&B&¬C V A&B&C - СДНФ |
| 0 | 0 | 0 | 0 |  |
| 0 | 0 | 1 | 0 |  |
| 0 | 1 | 0 | 1 | ¬A&B&¬C V |
| 0 | 1 | 1 | 0 |  |
| 1 | 0 | 0 | 0 |  |
| 1 | 0 | 1 | 0 |  |
| 1 | 1 | 0 | 1 | A&B&¬C V |
| 1 | 1 | 1 | 1 | A&B&C |

Проведем преобразования СДНФ данной функции F(A, B, C).

¬A&B&¬C V A&B&¬C V A&B&C = ¬A&B&¬C V A&B&¬C V A&B&C = ¬A&B&¬C V A&B&(¬C V C) = ¬A&B&¬C V A&B&1 = ¬A&B&¬C V A&B = B&(¬A&¬C V A) = B&(¬C V A)

F(A,B,C) = B&(¬C V A)

Эйлеровы круги

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| ⎤ А ⬄ not А |  | A ⊕ B ⬄ A xor B |  |
| А&В ⬄ А and В |  | А ≡ B |  |
| А V B ⬄ А or В |  | A → B |  |

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| А | B | С | F(A,B,C)= | B&(AV¬C) |
| 1. 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1. 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1. 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1. 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1. 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1. 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1. 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1. 1 | 1 | 1 | 1 |

Решение задач

Задание 2. Миша заполнял таблицу истинности функции (x /\ ¬y) \/ (x≡z) \/ ¬w, но успел заполнить лишь фрагмент из трёх различных её строк, даже не указав, какому столбцу таблицы соответствует каждая из переменных w, x, y, z. (x /\ ¬y)\/ (x≡z) \/ ¬w

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Знак | имя | Pascal | C++ | Python |
| ┐ | не | not | ! | ! |
| & | и | and | && | and |
| V | или | or | || | Or |

Определите, какому столбцу таблицы соответствует каждая из переменных *w, x, y, z*. В ответе напишите буквы *w, x, y, z* в том порядке, в котором идут соответствующие им столбцы (сначала буква, соответствующая первому столбцу; затем буква, соответствующая второму столбцу, и т.д.). Буквы в ответе пишите подряд, никаких разделителей между буквами ставить не нужно. Пример. Функция задана выражением *x\/y*, зависящим от двух переменных, а фрагмент таблицы имеет следующий вид.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| ? | ? | ¬x \/ y |
| 0 | 1 | 0 |

В этом случае первому столбцу соответствует переменная y, а второму столбцу – переменная x. В ответе следует написать yx.

Решение

В формуле (x/\y) \/ (x≡z) \/ w аргумент w должен быть 1. Значит, w во втором столбце и значения аргументов в столбце 1.

Нужно определить набор аргументов, на которых функция (x /\ y) \/ (x≡z) = 0.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| x | y | z | (x /\ ¬y) \/ (x≡z) |
| 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

Значит, в приведенной таблице отражены наборы аргументов из 2-й, 4-й и 7-й строк таблицы истинности.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| w | x | y | z | (x /\ y) \/ (x≡z) \/ w |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |

Столбец *X* с двумя нулями, поэтому в первом столбце будет аргумент *х*. Теперь уже все значения аргументов определяются и видно, что *z* в третьем столбце, а *y* – в четвертом столбце.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| x | w | z | y | (x /\ ¬y)\/ (x≡z) \/ ¬w |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |

Ответ: xwzy.

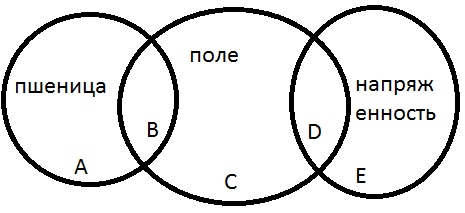
Задание 17. В таблице приведены запросы и количество найденных по ним страниц некоторого сегмента сети Интернет.

|  |  |
| --- | --- |
| **Запрос** | **Найдено страниц**  *(в сотнях тыс.)* |
| Поле | 54 |
| Пшеница | 40 |
| Напряжённость | 44 |
| Поле & Пшеница | 30 |
| Напряжённость & Поле | 14 |
| Напряжённость & Пшеница | 0 |

Какое количество страниц (в сотнях тыс.) будет найдено по запросу *Напряжённость | Поле | Пшеница*?

Считается, что все запросы выполнялись практически одновременно, так что набор страниц, содержащих все искомые слова, не изменялся за время выполнения запросов.

Раз множество *Напряжённость & Пшеница* пусто, то можно рассмотреть следующий вид Эйлеровых кругов.



Мы получим систему уравнений:

B+C+D=54

A+B=40

D+E=44

B=30

D=14

Из этой системы уравнений находим остальные значения.

А=10, В=30, С=10, D=14, Е=30

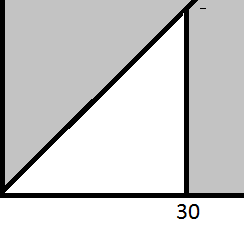
Количество страниц в множестве *Напряжённость | Поле | Пшеница?* будет А+B+C+D+Е=10+30+10+14+30=94

Ответ: 94.

Задание 18. Для какого наименьшего целого неотрицательного числа А выражение (x + 2y < A) \/ (y > x) \/ (x > 30) тождественно истинно, т.е. принимает значение 1 при любых целых неотрицательных x и y?

Решение:

Часть формулы (y > x) \/ (x > 30) истина в следующей заштрихованной области.



Значит, с помощью (x + 2y < A) надо определить область, содержащую незакрашенный треугольник с границами. Т.е. линия x+2y=A должна проходить выше точки с координатами (30, 30). Линия, проходящая через эту точку, имеет А=45. Значит, А>45 и А=46.

Ответ: 46.

Задание 23. Сколько существует различных наборов значений логических переменных *x1, x2, ...x8, y1, y2, ...y8,* которые удовлетворяют всем перечисленным ниже условиям?

(¬ (x1≡y1)) ≡ (x2≡y2)

(¬ (x2≡y2)) ≡ (x3≡y3)

...

(¬ (x7≡y7)) ≡ (x8≡y8)

В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений переменных *x1, x2, ...x8, y1, y2, ...y8,* при которых выполнена данная система равенств. В качестве ответа вам нужно указать количество таких наборов.

Решение:

I вариант

Сделаем замену (xi≡yi) на zi. Тогда получим следующую систему уравнений:

(¬ z1) ≡ z2

(¬ z2) ≡ z3

...

(¬ z7) ≡ z8

Отсюда следует, что переменные с нечётными номерами равны между собой, а также равны между собой переменные с чётными номерами, при этом аргументы с чётными и нечетными номерами имеют противоположные значения.

z1= z3= z5= z7≠ z2= z4= z6= z8

При zi = xi≡yi = 0 значения аргументов xi=0 и yi=1 или xi=1 и yi=0. Т.е. два набора значений аргументов.

При zi = xi≡yi = 1 значения аргументов xi=1 и yi=1 или xi=0 и yi=0. Тоже два набора значений аргументов.

Если z2i=1, z2i-1=0, число аргументов равно 28=256.

Если z2i=0, z2i-1=1, число аргументов равно 28=256.

Ответ: 512.

II вариант

Построим таблицу истинности для первой формулы.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| x1 | y1 | x2 | y2 | (¬ (x1≡y1)) ≡ (x2≡y2) | Обозначения |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |  |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | R1 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | R2 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |  |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | R3 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |  |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |  |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | R4 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | R5 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |  |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |  |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | R6 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |  |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | R7 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | R8 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |  |

Оставим строки c истинными значениями функции:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| x1y1x2y2 | ЧА | x2y2x3y3 | ЧА –Число аргументов | x3y3x4y4 | ЧА | ... | x7y7x8y8 | ЧА |
| 0001 | R1=1 | 0001 | R3+R5=2 | 0001 | 4 |  | 0001 | 64 |
| 00**10** | R2=1 | 0010 | R3+R5=2 | 0010 | 4 |  | 0010 | 64 |
| 0100 | R3=1 | 0100 | R1+R7=2 | 0100 | 4 |  | 0100 | 64 |
| 01*11* | R4=1 | 0111 | R1+R7=2 | 0111 | 4 |  | 0111 | 64 |
| 1000 | R5=1 | **10**00 | R2+R8=2 | 1000 | 4 |  | 1000 | 64 |
| 10*11* | R6=1 | **10**11 | R2+R8=2 | 1011 | 4 |  | 1011 | 64 |
| 1101 | R7=1 | *11*01 | R4+R6=2 | 1101 | 4 |  | 1101 | 64 |
| 11**10** | R8=1 | *11*10 | R4+R6=2 | 1110 | 4 |  | 1110 | 64 |

Число наборов аргументов будет 64\*8=512.

Ответ: 512.